Summary of Temporal Logic

Phil 143 Handout

§1 Basic Temporal Logic

Definition 1. A ***flow of time*** is a model $\mathcal{T} = \langle T, R, V\rangle$ where R is transitive and irreflexive.

In what follows, for readability, I'll use "$<$" instead of "R".

Basic Priorean Temporal Language. $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \mathsf{G}\varphi \mid \mathsf{H}\varphi$, where:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}\varphi &:= \neg\mathsf{G}\neg\varphi \\ \mathsf{P}\varphi &:= \neg\mathsf{H}\neg\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}, t \models \mathsf{G}\varphi &\iff \forall s \in T:\ t < s \Rightarrow \mathcal{T}, s \models \varphi \\ \mathcal{T}, t \models \mathsf{F}\varphi &\iff \exists s \in T:\ t < s \ \&\ \mathcal{T}, s \models \varphi \\ \mathcal{T}, t \models \mathsf{H}\varphi &\iff \forall s \in T:\ s < t \Rightarrow \mathcal{T}, s \models \varphi \\ \mathcal{T}, t \models \mathsf{P}\varphi &\iff \exists s \in T:\ s < t \ \&\ \mathcal{T}, s \models \varphi \end{aligned}$$

Minimal Temporal Logic: K.t

- All substitution instances of propositional logic
- (K axioms) $\mathsf{G}(\varphi \to \psi) \to (\mathsf{G}\varphi \to \mathsf{G}\psi)$ and $\mathsf{H}(\varphi \to \psi) \to (\mathsf{H}\varphi \to \mathsf{H}\psi)$
- (CV axioms) $\varphi \to \mathsf{GP}\varphi$ and $\varphi \to \mathsf{HF}\varphi$
- (4 axioms) $\mathsf{FF}\varphi \to \mathsf{F}\varphi$ and $\mathsf{PP}\varphi \to \mathsf{P}\varphi$
- (Eter) if $\vdash_{\mathbf{K.t}} \varphi$, then $\vdash_{\mathbf{K.t}} \mathsf{G}\varphi$ and $\vdash_{\mathbf{K.t}} \mathsf{H}\varphi$

§2 Correspondence Theory

§2.1 Splitting

Non-Branching Future: $\forall x, y, z\ ((x < y \wedge x < z) \to (y < z \vee y = z \vee z < y))$

$$\begin{aligned} (\mathsf{F}\varphi \wedge \mathsf{F}\psi) &\to (\mathsf{F}(\varphi \wedge \mathsf{F}\psi) \vee \mathsf{F}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathsf{F}(\mathsf{F}\varphi \wedge \psi)) \\ \mathsf{F}\varphi &\to \mathsf{G}(\mathsf{P}\varphi \vee \varphi \vee \mathsf{F}\varphi) \end{aligned}$$

Non-Branching Past: $\forall x, y, z\ ((y < x \wedge z < x) \to (y < z \vee y = z \vee z < y))$

$$\begin{aligned} (\mathsf{P}\varphi \wedge \mathsf{P}\psi) &\to (\mathsf{P}(\varphi \wedge \mathsf{P}\psi) \vee \mathsf{P}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathsf{P}(\mathsf{P}\varphi \wedge \psi)) \\ \mathsf{P}\varphi &\to \mathsf{H}(\mathsf{P}\varphi \vee \varphi \vee \mathsf{F}\varphi) \end{aligned}$$

§2.2 Endpoints

No End of Time: $\forall x \exists y\,(x < y)$

$$\mathsf{F}\top$$

$$\mathsf{G}\varphi \to \mathsf{F}\varphi$$

No Beginning of Time: $\forall x \exists y\,(y < x)$

$$\mathsf{P}\top$$

$$\mathsf{H}\varphi \to \mathsf{P}\varphi$$

End of Time: $\exists x \forall y\,(y < x \vee x = y)$

$$\text{if time is linear: } \mathsf{G}\bot \vee \mathsf{FG}\bot$$

Beginning of Time: $\exists x \forall y\,(x < y \vee x = y)$

$$\text{if time is linear: } \mathsf{H}\bot \vee \mathsf{PH}\bot$$

§2.3 Spacing

Density: $\forall x, y\ (x < y \to \exists z\ (x < z < y))$

$$\mathsf{F}\varphi \to \mathsf{FF}\varphi$$

Future Discreteness: $\forall x, y\ (x < y \to \exists z\ (x < z \wedge \neg \exists u\ (x < u < z)))$

$$\text{if time is linear: } (\mathsf{F}\top \wedge \varphi \wedge \mathsf{H}\varphi) \to \mathsf{FH}\varphi$$

Future Discreteness: $\forall x, y\ (y < x \to \exists z\ (x < z \wedge \neg \exists u\ (x < u < z)))$

$$\text{if time is linear: } (\mathsf{P}\top \wedge \varphi \wedge \mathsf{G}\varphi) \to \mathsf{PG}\varphi$$

Finite Future Intervals: $\forall x, y\ (x < y \to \{u \mid x < u < y\}$ is finite$)$

$$\text{if time is linear: } \mathsf{G}(\mathsf{G}\varphi \to \varphi) \to (\mathsf{FG}\varphi \to \mathsf{G}\varphi)$$

Finite Past Intervals: $\forall x, y\ (y < x \to \{u \mid x < u < y\}$ is finite$)$

$$\text{if time is linear: } \mathsf{H}(\mathsf{H}\varphi \to \varphi) \to (\mathsf{PH}\varphi \to \mathsf{H}\varphi)$$

Dedekind Continuity:

$$\forall P\ [\forall x, y\ (Px \wedge \neg Py \to x < y) \to \exists z \forall x, y\ (x \neq z \neq y \wedge Px \wedge \neg Py \to x < z < y)]$$

$$\text{if time is linear: } (\mathsf{FH}\varphi \wedge \mathsf{F}\neg\varphi \wedge \mathsf{G}(\neg\varphi \to \mathsf{G}\neg\varphi)) \to \mathsf{F}((\varphi \wedge \mathsf{G}\neg\varphi) \vee (\neg\varphi \wedge \mathsf{H}\varphi))$$

§3 Expanding the Language

Progressive. $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \mathsf{G}\varphi \mid \mathsf{H}\varphi \mid \Pi\varphi$

$$\mathcal{T}, t \models \Pi\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists s_1, s_2 \in T\colon\ [s_1 < t < s_2\ \&\ \forall u \in T\ (s_1 < u < s_2 \Rightarrow \mathcal{T}, u \models \varphi)]$$

Since and Until. $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \mathsf{G}\varphi \mid \mathsf{H}\varphi \mid \mathsf{S}\varphi\psi \mid \mathsf{U}\varphi\psi$

$$\mathcal{T}, t \models \mathsf{U}\varphi\psi \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \in T\colon\ [t < s\ \&\ \mathcal{T}, s \models \varphi\ \&\ \forall u \in T\ (t < u < s \Rightarrow \mathcal{T}, u \models \psi)]$$
$$\mathcal{T}, t \models \mathsf{S}\varphi\psi \quad \Leftrightarrow \quad \exists s \in T\colon\ [s < t\ \&\ \mathcal{T}, s \models \varphi\ \&\ \forall u \in T\ (s < u < t \Rightarrow \mathcal{T}, u \models \psi)]$$

Nexttime. $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \mathsf{G}\varphi \mid \mathsf{H}\varphi \mid \mathsf{X}\varphi$

$$\mathcal{T}, t \models \mathsf{X}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T}, t+1 \models \varphi$$

Peircean Branching Time. $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \mathsf{F}_{\Box}\varphi \mid \mathsf{P}_{\Box}\varphi$

$$\mathcal{T}, t \models \mathsf{F}_{\Box}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ branches } b \text{ through } t\, \exists t' \in b\colon\ t < t'\ \&\ \mathcal{T}, t' \models \varphi$$
$$\mathcal{T}, t \models \mathsf{P}_{\Box}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ branches } b \text{ through } t\, \exists t' \in b\colon\ t' < t\ \&\ \mathcal{T}, t' \models \varphi$$

Ockhamist Branching Time. $\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid \mathsf{G}\varphi \mid \mathsf{H}\varphi \mid \blacksquare\varphi$

$$\mathcal{T}, b, t \models \mathsf{G}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in b\colon\ t < s \Rightarrow \mathcal{T}, s \models \varphi$$
$$\mathcal{T}, b, t \models \mathsf{H}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in b\colon\ s < t \Rightarrow \mathcal{T}, s \models \varphi$$
$$\mathcal{T}, b, t \models \blacksquare\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall \text{ branches } b' \text{ through } t\colon\ \mathcal{T}, b', t \models \varphi$$